Equation de la chaleur sur un anneau

(X-ENS An4)

Thm : Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non nulle, continue $\mathcal{C}^1$ par morceaux, 2π-périodique.
Il existe une unique solution au problème $\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$, 2π périodique par rapport à x et pour tout t, continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Analyse : Soit u une solution du problème.
$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $u_t = u(t,\cdot)$ est $\mathcal{C}^\infty$ 2π-pér donc $u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t) e^{inx}$ avec $c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x) e^{-inx} dx$
De même, $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n(t) e^{inx}$ avec $\tilde{c}_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_t u(t,x) e^{-inx} dx$.
Or sur $[t_0,t_1]$, $|\partial_t u(t,x) e^{-inx}| \leq \|\partial_t u(\cdot,x)\|_{\infty,[t_0,t_1]}$ intégrable sur $[t_0,t_1]$.
Donc par dérivation sous l'intégrale, c_n est dérivable sur $[t_0,t_1]$ (donc sur $\mathbb{R}_+^*$) et
$c_n'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_t u(t,x) e^{-inx} dx = \tilde{c}_n(t)$.
Similairement, $x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ est somme de sa série de Fourier et par double intégration (et 2π-périodicité) : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 c_n(t) e^{inx}$.
[A t fixé, les séries convergent normalement]
$\partial_t u = \partial_x^2 u$ se réécrit $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n'(t) + n^2 c_n(t)) e^{inx} = 0$ et par unicité,
$\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n' = -n^2 c_n$.

> En effet, si $p \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$:
> $0 = \int_0^{2\pi} e^{-ipx} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n'(t) + n^2 c_n(t)) e^{inx} dx \underset{\text{CVN}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n'(t) + n^2 c_n(t)) \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)x} dx$
> $= 2\pi (c_p'(t) + p^2 c_p(t))$.

Donc $c_n(t) = \alpha_n e^{-n^2 t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_+$ par continuité sous l'intégrale.
De plus, u_0 est 2π-pér, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc somme de sa SF.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $u_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}$.
Le thm de Parseval appliqué à $u_0 - u_t$ assure alors :
$\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $|C_n - c_n(t)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k - c_k(t)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u_0(x) - u_t(x)|^2 dx \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ par CVD
[bornée car continue sur le compact $[0,1] \times [0,2\pi]$].
Donc $C_n = \lim_{t\to 0} c_n(t) = \alpha_n$. Ainsi, $u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-n^2 t} e^{inx}$, $\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Synthèse : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}$, $|C_n e^{-n^2 t} e^{ixn}| \leq |C_n|$ et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n| < \infty$ car u_0 $\mathcal{C}^1_{pm}$ 2π-pér.
Donc la série ci-dessus cvn, u est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Aussi, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $u_t : x \mapsto u(t,x)$ est 2π-périodique.

Si de plus $t_0 > 0$, $\forall t > t_0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial x^l}\left(c_n e^{-n^2 t} e^{inx}\right)\right| = n^{2k+l}|c_n| e^{-n^2 t}$

$\leq n^{2k+l} K e^{-n^2 t_0} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

où $|c_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} u_0(x) e^{-inx} dx\right| \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{T})} = K$

Il y a donc CVN sur $]t_0, +\infty[$, puis sur $\mathbb{R}_+^*$, donc u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

$\forall k, l \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\partial^{k+l} u}{\partial^k t\, \partial^l_x}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^k i^l n^{2k+l} c_n e^{-n^2 t} e^{inx}$. $\underline{\partial_t u = \partial_x^2 u}$.